Nombre del estudiante

Grupo

Fecha

Los números naturales y los axiomas de Peano

Desde las primeras civilizaciones, el ser humano utilizó los números para contar objetos, medir terrenos, registrar intercambios comerciales y organizar el tiempo. Culturas como la egipcia, la babilónica y la griega desarrollaron sistemas numéricos y procedimientos aritméticos que respondían a necesidades prácticas. De este modo, el uso de los números se basó principalmente en la intuición aritmética del conteo, dejando en segundo plano la necesidad de una fundamentación lógica rigurosa.

A finales del siglo XIX, con el desarrollo de la matemática moderna, fue preciso **formalizar los conceptos básicos** sobre los cuales se construía toda la aritmética. En este contexto, el matemático italiano Giuseppe Peano propuso en 1889 un sistema de axiomas capaz de definir rigurosamente los números naturales, sin recurrir a ejemplos concretos ni a la experiencia cotidiana, y con los cuales fuese posible demostrar todas sus propiedades.

Esto marcó un punto de inflexión en la historia de las matemáticas, al consolidar el enfoque axiomático como base del razonamiento matemático moderno. Como resultado, la aritmética dejó de ser únicamente un conjunto de reglas prácticas y se convirtió en una disciplina con fundamentos lógicos sólidos, influyendo de manera decisiva en el desarrollo posterior del álgebra, la lógica matemática y las ciencias formales.

Los números naturales

El conjunto de los números naturales se representa como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Cada número tiene un sucesor, existe un orden natural entre ellos y forman un conjunto infinito. Estas propiedades no se asumen de manera intuitiva, sino que se derivan de los axiomas de Peano.

Axiomas de Peano

El conjunto de los números naturales y todas las reglas aritméticas utilizadas en las operaciones se pueden definir a partir de un conjunto de cinco postulados básicos, que son:

1. Existe un número natural llamado 0 (o 1, dependiendo de cómo se defina el conjunto).
2. Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también es un número natural.
3. El 0 (o 1, si se considera que el cero no pertenece a este conjunto) no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si existen dos números naturales m y n con el mismo sucesor, entonces m y n son el mismo número natural.

5. Si un conjunto de números naturales incluye al 0 o al 1 y, además, el sucesor de cada número está en el conjunto, entonces ese conjunto es el conjunto completo de todos los números naturales ($\mathbb{N}$).

Antecesor y sucesor

El antecesor y el sucesor definen los números inmediatos a cualquier número dado.

- **Antecesor:** número que precede inmediatamente a n, donde n es un número natural. Se obtiene restando 1: $n - 1$. Por ejemplo, el antecesor de 7 es 6.
- **Sucesor:** número que sigue inmediatamente a n, donde n es un número natural. Se obtiene sumando 1: $n + 1$. Por ejemplo, el sucesor de 7 es 8.

1. Indica el antecesor y el sucesor de cada uno de los números naturales de la tabla.

Cifra	Antecesor	Sucesor
500	499	501
320		
1 000 000		
800		
128 943		
0		

2. Explica: ¿Qué sucede con el antecesor de 0 en el conjunto de los números naturales?

....

....

Importancia de los axiomas de Peano

Los axiomas de Peano permiten fundamentar formalmente la aritmética, demostrar propiedades generales de los números naturales y desarrollar el razonamiento inductivo.

A partir de estos pueden realizarse diversas demostraciones, como las siguientes.

1. El sucesor de un número natural es distinto del número original

Proposición:
Para todo número natural (n), su sucesor ($S(n)$) es distinto de (n).

Demostración:
Por los axiomas de Peano, todo número natural tiene un sucesor y dicho sucesor también es un número natural. Además, el axioma que establece que el número 1 no es sucesor de ningún número natural y el axioma de unicidad del sucesor garantizan que la función sucesor no genera ciclos.

Si existiera un número natural tal que ($S\ (n) = n$), se produciría un ciclo, lo cual contradice la estructura definida por los axiomas. Por lo tanto, el sucesor de un número natural siempre es distinto de él.

Entonces, ningún número natural es su propio sucesor.

2. El número 2 es un número natural

Proposición:
El número 2 pertenece al conjunto de los números naturales.

Demostración:
Por el primer axioma de Peano, el número 1 es un número natural.

Por el segundo axioma, todo número natural tiene un sucesor que también es un número natural.

Definimos al número 2 como el sucesor de 1, es decir, ($2 = S\,(1)$).

Por lo tanto, como 1 es natural y su sucesor también lo es, el 2 es un número natural.

3. No existen dos números naturales distintos con el mismo sucesor

Proposición:
Si ($S\,(a) = S\,(b)$), entonces ($a = b$).

Demostración:
Este resultado se deduce directamente del axioma de unicidad del sucesor, el cual establece que la función sucesor es inyectiva, es decir, que cada número natural tiene un sucesor único y ningún sucesor puede corresponder a dos números distintos.

Por lo tanto, los números naturales están perfectamente diferenciados unos de otros dentro de la secuencia.

4. Todos los números naturales son mayores o iguales que 1

Proposición:
Todo número natural es igual que 1 o es sucesor de otro número natural.

Demostración:
Caso base:
El número 1 pertenece a los naturales y cumple la propiedad.

Paso inductivo:
Supongamos que un número natural (n) cumple la propiedad.
Entonces, su sucesor ($S\,(n)$) también es un número natural y, por definición, mayor que (n).

Por el axioma de inducción, la propiedad se cumple para todos los números naturales.

Por lo tanto, el número 1 es el primer número natural y todos los demás se obtienen aplicando repetidamente la función sucesor.

5. El conjunto de los números naturales es infinito

Proposición:
No existe un número natural que sea el último.

Demostración:
Por el segundo axioma de Peano, todo número natural tiene un sucesor.

Esto implica que, dado cualquier número natural (n), siempre existe otro número natural ($S(n)$) mayor que él.

Por lo tanto, no puede existir un "último" número natural, es decir, el conjunto de los números naturales es infinito.

Estos ejemplos muestran cómo dichos axiomas permiten **demostrar propiedades fundamentales** de los números naturales sin recurrir a la intuición del conteo. A partir de principios simples, se construye una estructura lógica sólida que sustenta toda la aritmética y prepara el camino para el razonamiento matemático formal.

1. Explica con tus propias palabras qué significa que todo número natural tenga un sucesor.

   ....

   ....

   ....

2. Justifica por qué, a partir de los axiomas de Peano, se puede afirmar que los números naturales son infinitos.

   ....

   ....

   ....

3. Analiza la propiedad $P(n)$: "$n + 1$ es un número natural". Explica cómo el axioma de inducción permite afirmar que esta propiedad se cumple para todo número natural.

   ....

   ....

   ....